## *Показательная функция, её график, свойства.*

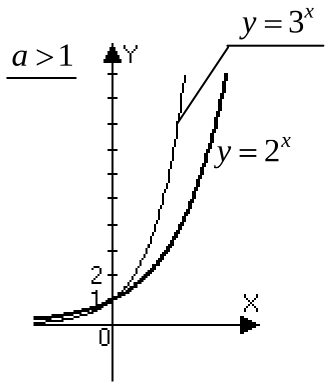
Определение. Функция вида $y = a^x$, где $a \neq 1$ и $a > 0$ называется показательной.

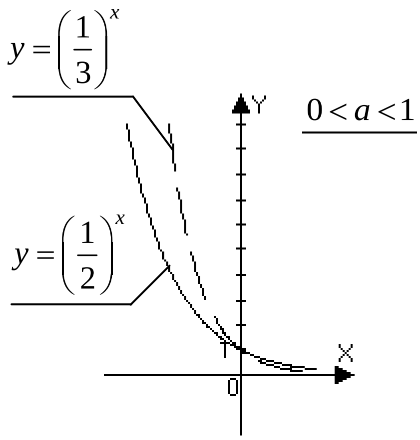
Рассмотрим функции.

$y = 2^x$; $\quad y = 3^x \qquad (a > 1)$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $\; y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad (a < 1)$

построим их графики прочтём свойства функций.




Свойства

1. Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Множество значений функции: $y \in (0; +\infty)$
3. При $x = 0 \quad y = 1$.

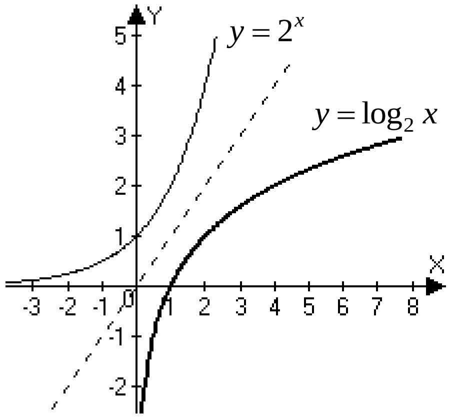
Эти свойства называются общими свойствами показательной функции и не зависят от основания, какое оно больше 1 или меньше 1.

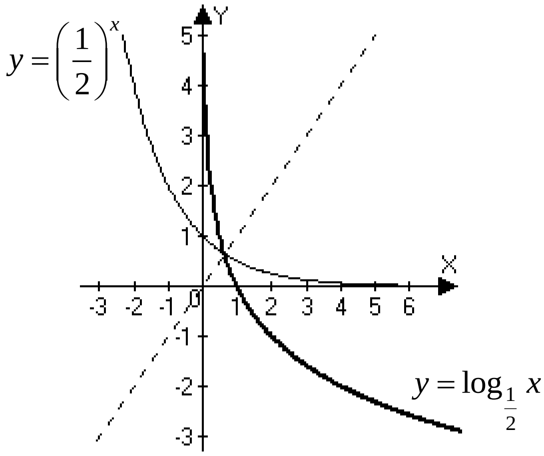
| $a > 1$ | $a < 1$ |
|---|---|
| 4. Функция возрастающая | 4. Функция убывающая |
| 5. при $x < 0 \quad y < 1$ | 5. при $x < 0 \quad y > 1$ |
| $x > 0 \quad y > 1$ | $x > 0 \quad y < 1$ |
| 6. $x \to \infty, \quad y \to \infty$ | 6. $x \to \infty, \quad y \to 0$ |
| та степень больше показатель которой больше | та степень больше, показатель которой меньше |

## *Логарифмическая функция, её график, свойства.*

Функция, обратная показательной, называется логарифмической $y = a^x$, $a \neq 1$ и $a > 0$ – показательная функция $x = \log_a y$, поменяем местами $x$ и $y$, получаем $y = \log_a x, \quad a \neq 1, \quad a > 0$ – это и есть логарифмическая функция.

Знаем, что графики обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Воспользовавшись этим свойством изобразим графики логарифмической функции при a > 1 и a < 1




Свойства

1. $D(y)$: $x \in (0;+\infty)$
2. $E(y)$: $y \in (-\infty;+\infty)$
2. при $x = 1 \quad y = 0$

Свойства (1 – 3) являются общими свойствами логарифмических функций и не зависят от основания (больше 1 или меньше 1).

Остальные свойства рассматриваются в зависимости от основания

| a > 1 | 0 < a < 1 |
|---|---|
| 3. Функция монотонно возрастающая | 4. Функция монотонно убывающая |
| 4. При $0 < x < 1 \quad y < 0$ <br> $x > 1 \quad y > 0$ | 5. При $0 < x < 1 \quad y > 0$ <br> $x > 1 \quad y < 0$ |
| 5. При $x \to \infty$ <br> $y \to \infty$ | 6. При $x \to \infty$ <br> $y \to -\infty$ |
| большему числу соответствует и больший логарифм | большему числу соответствует меньший логарифм |

## *Степенная функция, её график, свойства.*

1. Функция вида $y = x^n$ называется степенной функцией.

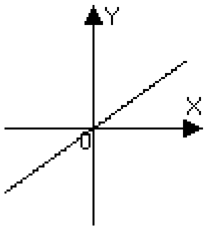
$x$ – аргумент (основание степени)

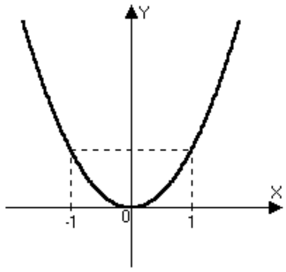
$n$ – показатель степени.

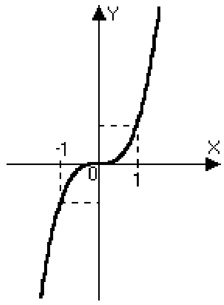
Рассмотрим графики функций при $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}$

При n > 0

$n = 1 \quad y = x$ $\qquad$ $n = 2 \quad y = x^2$ $\qquad$ $n = 3 \quad y = x^3$

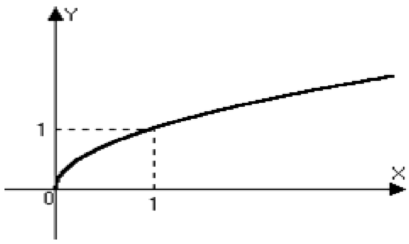


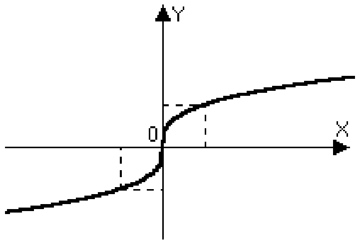



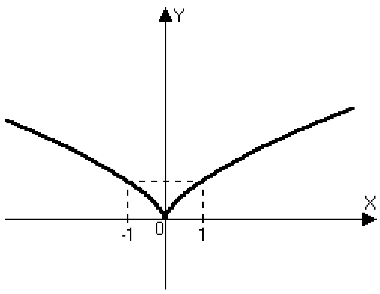




$n=\frac{1}{2}$ $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$; $x\geq 0$ $n=\frac{1}{3}$ $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$; $x\in R$ $n=\frac{2}{3}$ $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$

$x\in R;\ y>0$



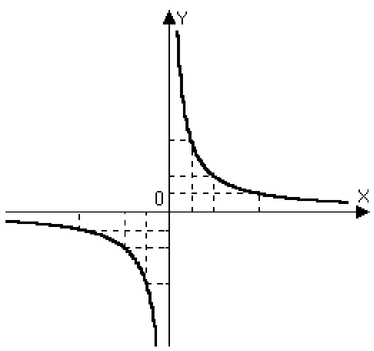



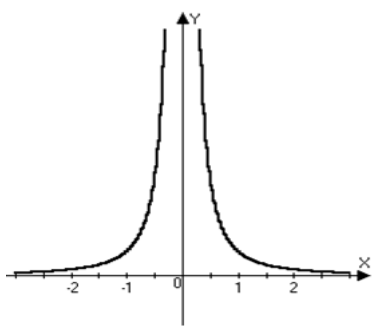



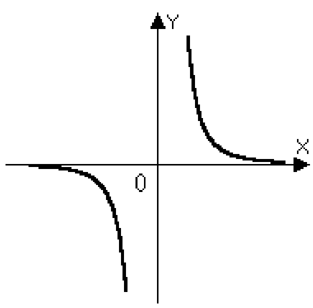

При n < 0

$n=-1;\ y=x^{-1}=\frac{1}{x};$ $x\neq 0$ $n=-2;\ y=x^{-2}=\frac{1}{x^2};$ $x\neq 0$ $n=-3;\ y=x^{-3}=\frac{1}{x^3};$

$x\neq 0$

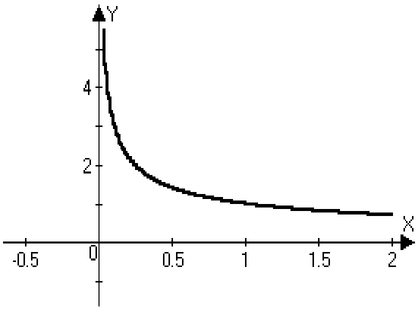


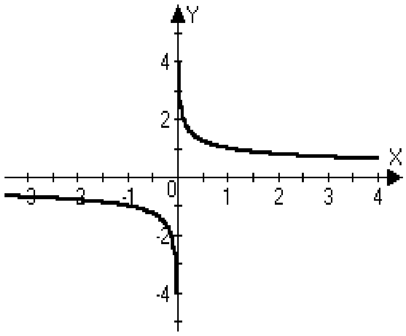



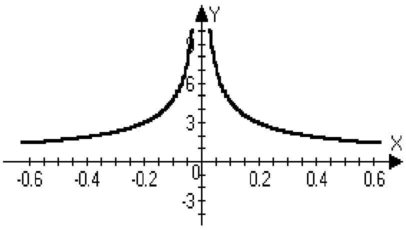



$n=-\frac{1}{2};\quad y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}};\quad x>0\qquad n=-\frac{1}{3};\quad y=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}};\quad x\neq 0$

$n=-\frac{2}{3};\quad y=x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\quad x\neq 0$




Отметим свойства общие для степенных функций:

1) при $n>0$ $x>0$ функция возрастающая
2) при $n<0$ $x>0$ функция убывающая

<u>Применение</u>: используя графики степенных функций можно графически решать некоторые алгебраические уравнения.

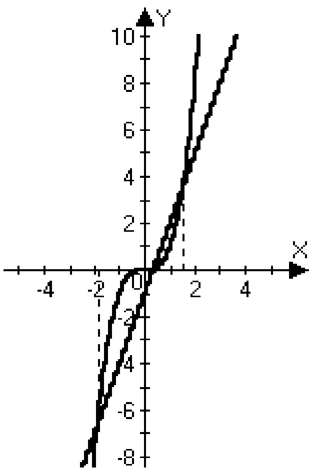
<u>Например</u> $x^3-3x+1=0;\qquad x^3=3x-1$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=3x-1 \end{cases}$$

$x_1=-1.88$

$x_2=0.35$

$x_3=1.53$




Корни приближённые, но другим способом это уравнение решить нельзя!

Построить схематически графики функций:

1) $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$

2) $y=2x^{\frac{2}{3}}$

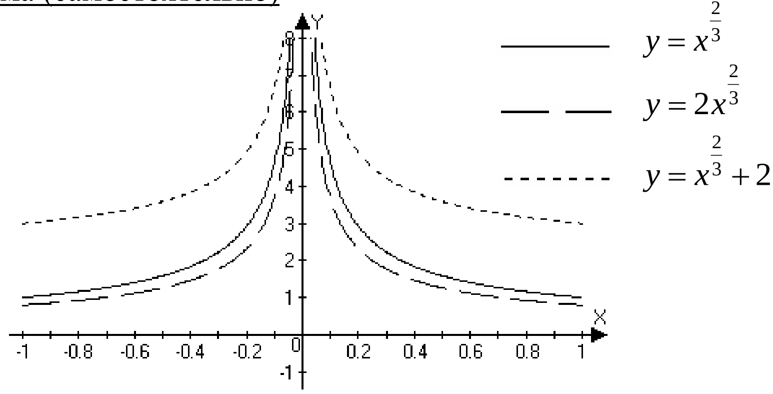
3) $y=x^{\frac{2}{3}}+2$

<u>Дома (самостоятельно)</u>

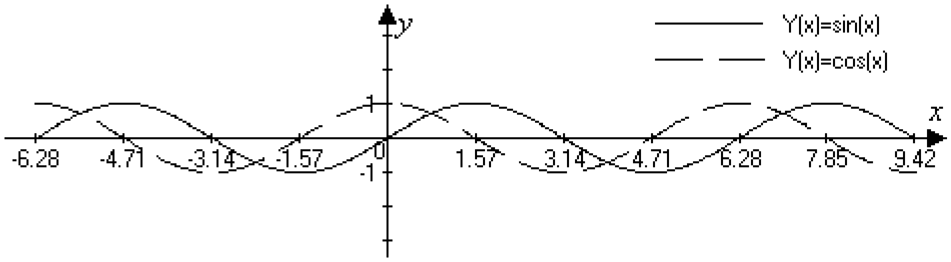
$y=x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y=2x^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y=x^{-\frac{2}{3}}+2=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+2\qquad x\neq 0$

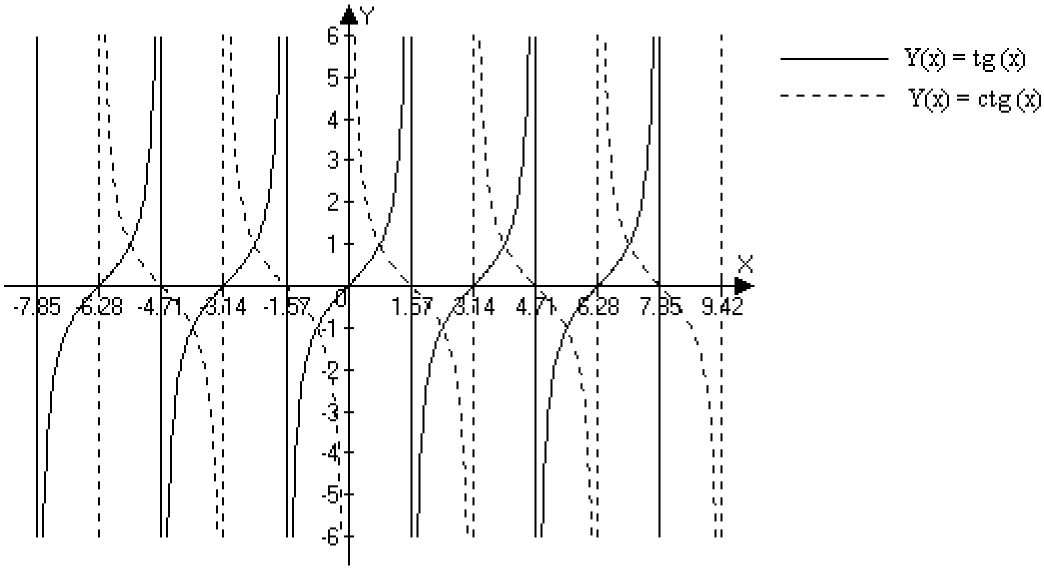


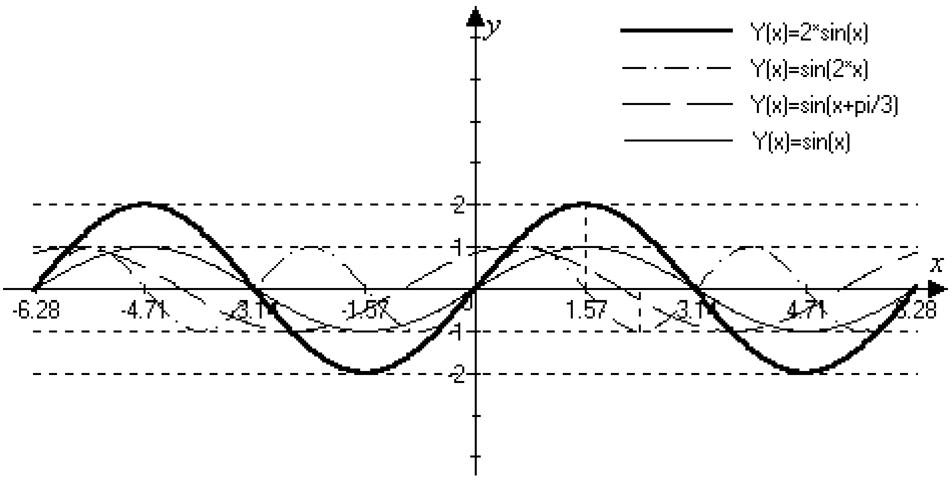
## *Графики и свойства тригонометрических функций. Простейшие преобразования графиков тригонометрических функций.*




$y = tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$y = ctg\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad \sin x \neq 0, x \neq \pi n, n \in Z$




$y = A\sin x$ А – амплитуда колебания

$y = \sin \omega x$ $w$ – частота колебания $\begin{matrix} w > 1 & \text{сжатие} \\ w < 1 & \text{растяжение} \end{matrix}$ вдоль оси Ох

$y = \sin(x+\varphi)$ $\varphi$ – начальная фаза колебания (сдвиг по оси Ox $\begin{matrix} \text{вправо при } \varphi < 0 \\ \text{влево при } \varphi > 0 \end{matrix}$ на $\varphi$)

$y = A\sin(\omega x+\varphi)$ – функция гармонического колебания

<u>Самостоятельно</u>:

Построить график функции:

$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad$ $y = 2\cos x$

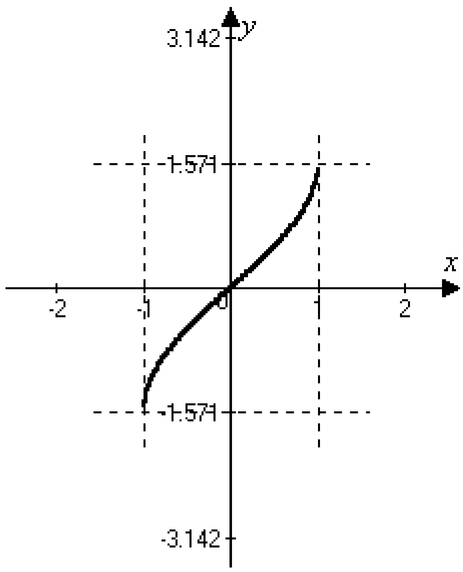
$y = \sin\frac{1}{2}x$

## *Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики*

**1)** $\underline{y = \arcsin x}$

Функция $y = \sin x$, где $x \in (-\infty; +\infty)$ не является монотонной на этом промежутке. Поэтому, чтобы говорить об обратной функции, надо выделить участок монотонности. Для функции $y = \arcsin x$ является отрезок $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Итак: $y = \sin x$ $\qquad$ $x = \arcsin y$ $\qquad$ $\underline{y = \arcsin x}$




Свойства функции $y = \arcsin x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

4) Функция монотонно возрастает $[-1;1]$

Например:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 30^\circ = \arcsin\frac{1}{2}$

$\sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ = \arcsin 1$

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$

$\arcsin 0 = 0$

$\arcsin 0,72 = 46^\circ 03'$

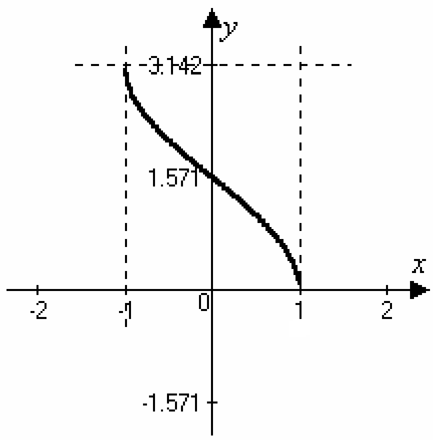
$\arcsin 0,236 = 13^\circ 39'$

**2)** $\underline{y = \arccos x}$

$y = \cos x$

$x = \arccos y$ $\quad$ Промежуток монотонности $0 \le x \le \pi$

$y = \arccos x$




Свойства функции $y = \arccos x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in [0;\pi]$

3) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

4) Функция монотонно убывает $[-1;1]$

Например:

$\arccos\frac{1}{2}=60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$

$\arccos(-1)=180^\circ$ или $\pi$

$\arccos 0=90^\circ$ или $\frac{\pi}{2}$

$\arccos 0,708=44^\circ 55'$

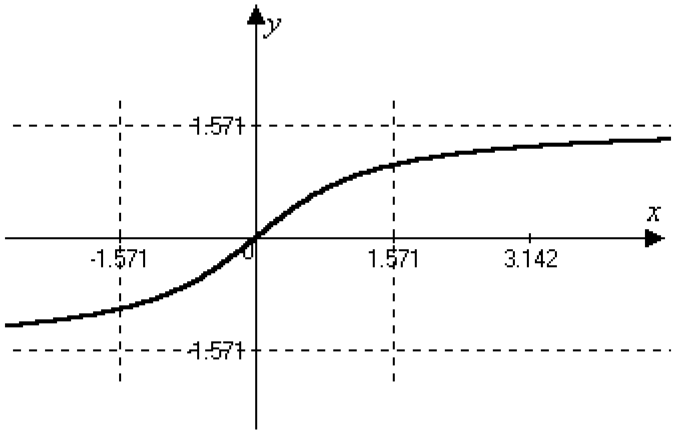
$\arccos 0,112=83^\circ 34'$

**3**) $\underline{y=arctgx}$

Промежуток монотонности $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

$y=tgx$

$x=arctgy$ $\quad \underline{y=arctgx}$




Свойства функции $\underline{y=arctgx}$

1) Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$

2) Множество значений $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

3) $arctg(-x)=-arctgx$

4) Функция монотонно возрастает $(-\infty;+\infty)$

Например:

$arctg1=45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$

$arctg\sqrt{3}=60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$

$arctg2=63^\circ 26'$

$arctg14,7=86^\circ 11'$

**4**) $y=arcctgx$

Промежуток монотонности $0<x<\pi$

$y=ctgx$

$x=arcctgy$ $\quad \underline{y=arcctgx}$

Свойства функции $\underline{y=arcctgx}$

1) Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$

2) Множество значений $y\in(0;\pi)$

3) $arcctg(-x)=\pi-arcctgx$

4) Функция монотонно убывает $(-\infty;+\infty)$